

TD1 : Nombres complexes et trigonométrie

Exercice 1. Soient $z_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{6} - i\sqrt{2})$ et $z_2 = 1 - i$.

- Calculer le module et l'argument de z_1 , z_2 et z_1/z_2 .
- Mettre z_1/z_2 sous la forme algébrique.
- En déduire les valeurs de $\cos \frac{\pi}{12}$ et de $\sin \frac{\pi}{12}$.

Exercice 2. Soit $u = 2 + i2\sqrt{3}$.

- Calculer le module et l'argument de u .
- Calcul de u^{2013} (forme algébrique, trigonométrique et exponentielle).
- Trouver tous les nombres complexes z tels que $z^4 = u$.

Exercice 3. Résoudre dans l'ensemble des complexes

- $2z - (1 + i)\bar{z} = -1 + 5i$,
- $z^2 - (1 + i\sqrt{3})z + 1 + i\sqrt{3} = 0$,
- $z^5 = 1$.

Exercice 4. Linéariser

- $\cos^4 x$,
- $\cos^2 x \sin x$.

Exercice 5 (Formule de Moivre). Calculer $\cos(5x)$ en fonction de $\cos x$. En déduire la valeur de $\cos \frac{\pi}{10}$.

Exercice 6. On donne le nombre complexe $u = \sqrt{2 - \sqrt{2}} - i\sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

- Calculer u^2 et u^4 .
- Calculer le module et un argument de u^4 .
- En déduire le module et un argument de u .
- En déduire les valeurs de $\cos \frac{3\pi}{8}$ et $\sin \frac{3\pi}{8}$, puis de $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$.

Exercice 7 (Application en électricité). *Attention : en électricité, le complexe i est noté j afin de ne pas le confondre avec i , l'intensité d'un courant électrique. Ainsi, dans la suite de l'exercice, on a $j^2 = -1$.*

En électricité, on peut caractériser le comportement d'un dipôle passif linéaire en régime sinusoïdale avec un nombre complexe que l'on appelle *impédance complexe*.

Ainsi, l'impédance complexe d' :

- une résistance est $\underline{Z}_R = R$ où R est la valeur de la résistance en ohms ;
- une bobine est $\underline{Z}_L = jL\omega$ où L est l'inductance en henry de la bobine et ω la pulsation du courant en rad.s^{-1} ;
- un condensateur est $\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$ où C est la capacité en farad du condensateur et ω la pulsation du courant en rad.s^{-1} .

On associe une résistance, une bobine et un condensateur en série. L'impédance complexe de l'association est alors

$$\underline{Z} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C$$

- a. La *partie résistive* de l'impédance complexe $\underline{Z}$ est la partie réelle de $\underline{Z}$. Donner son expression.
- b. La *réactance* X correspond à la partie imaginaire de l'impédance complexe $\underline{Z}$. Donner son expression.
- c. L'*impédance* de l'association (en ohms) correspond au module de l'impédance complexe. Donner son expression.
- d. Le *déphasage* entre tension et courant est donné par l'argument de l'impédance complexe. Donner son expression.